



Centro de Tecnologia

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Aplicações de Eletrônica de Potência em Sistemas de Potência

Transformada de Clarke e Park

Prof. Kleber Lima

Sumário

- Objetivos
- Introdução
- Transformada de Clarke
- Vetor espacial
- Transformada de Park

Objetivo

- Compreensão da importância da mudança de coordenadas
- Transformação de coordenadas abc para $\alpha\beta$
- Compreensão e determinação do vetor girante
- Transformação de coordenadas abc para dq

Introdução

- Fasores são números complexos utilizados para representar grandezas que variam senoidalmente no tempo
- Por exemplo, a *fmm* com distribuição aproximadamente senoidal reproduzidas por cada enrolamento do estator de uma máquina trifásica, podem ser representadas pelos vetores espaciais (fasores espaciais)
- A *fmm* do estator é a soma no espaço das *fmm*s de cada fase, dada por:

$$F_s = \frac{N}{2} \left[i_a(t) \cos(\omega t) + i_b(t) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c(t) \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

Transformada de Clarke

Seja o sistema trifásico definido pelos três fasores da Fig. 1, com equações:

$$v_a(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t)$$

$$v_b(t) = \sqrt{2}V \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_c(t) = \sqrt{2}V \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

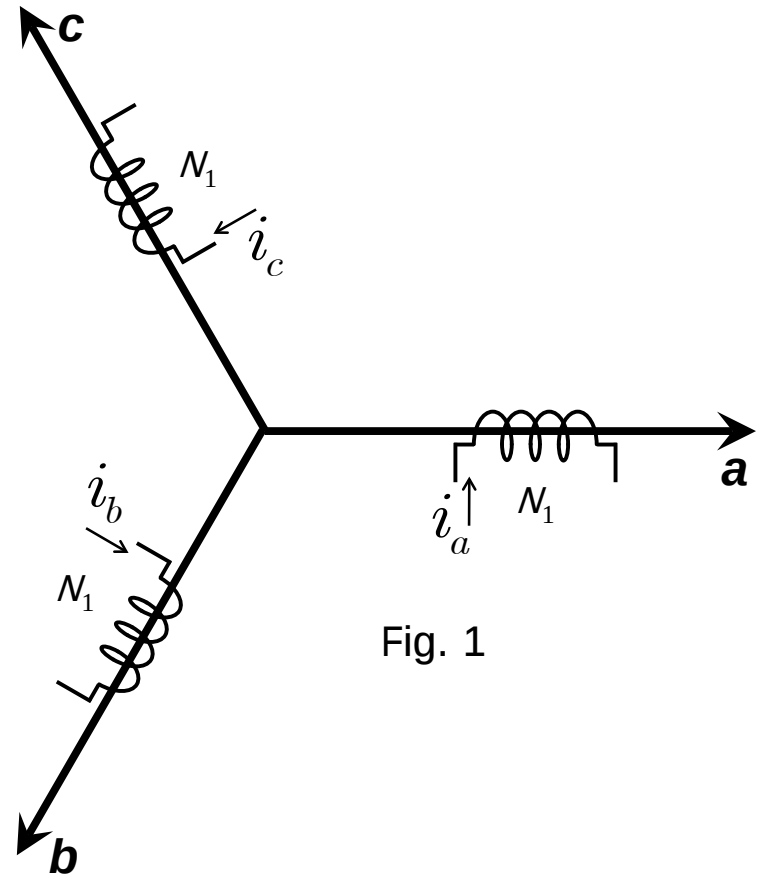


Fig. 1

Transformada de Clarke

O vetor espacial da corrente é definido a partir da projeção da *fmm* de cada fase nos eixos ortogonais fictícios α e β .

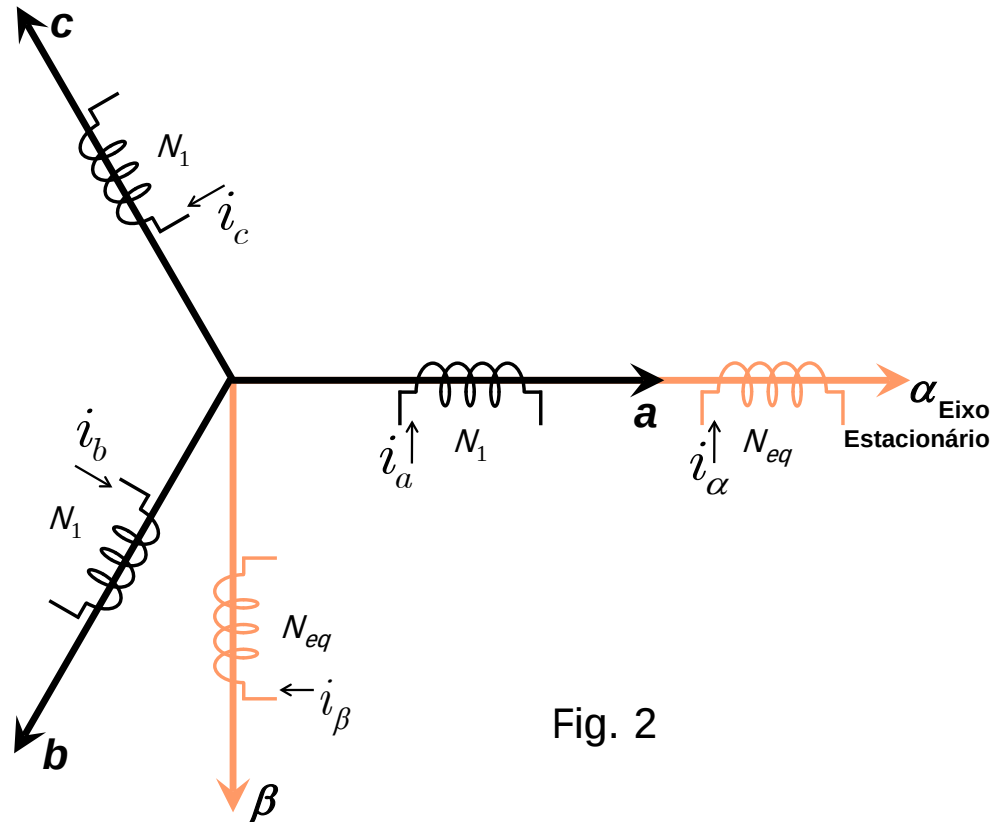


Fig. 2

$$\frac{N_{eq}}{2} i_{\alpha} = \frac{N_1}{2} \left[i_a(t) + i_b(t) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i_c(t) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$\frac{N_{eq}}{2} i_{\beta} = \frac{N_1}{2} \left[i_b(t) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i_c(t) \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

Transformada de Clarke

Após algumas simplificações,
resulta nas expressões do
sistema bifásico equivalente,
dado por:

$$i_{\alpha} = k \left[i_a(t) + i_b(t) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i_c(t) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$i_{\beta} = k \left[i_b(t) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i_c(t) \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$k = \frac{N_1}{N_{eq}}$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}}$$



Invariância em potência

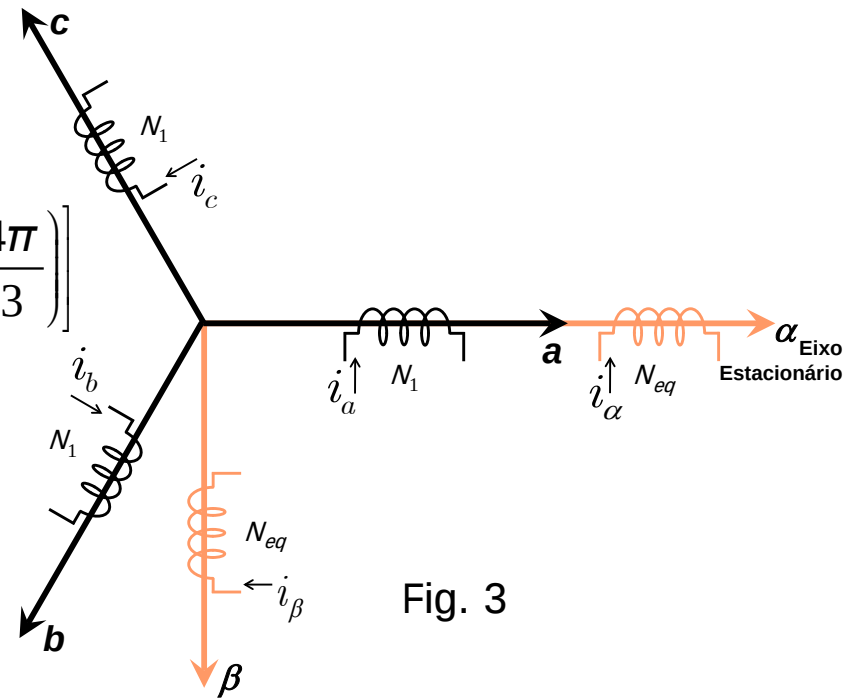


Fig. 3

Transformada de Clarke

Após algumas simplificações, resulta nas expressões do sistema bifásico equivalente, dado por:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Sistema a três fios
implica em ausência de
componente homopolar

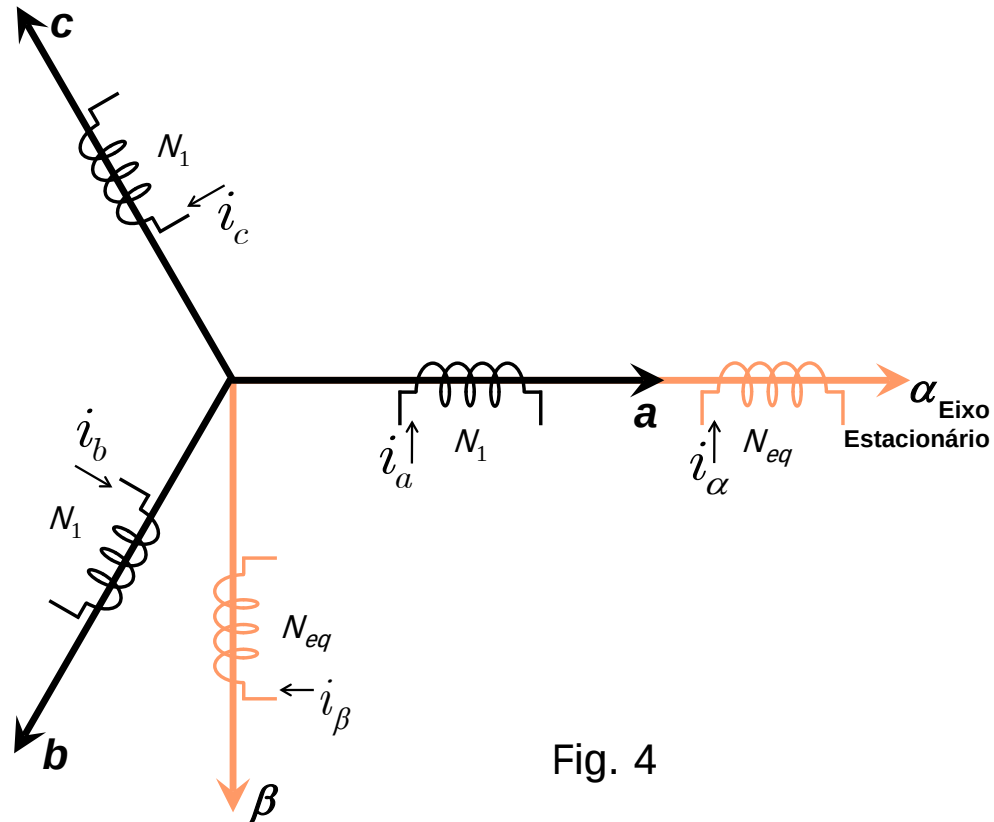


Fig. 4

Transformada de Clarke

Sistema com a presença de componente homopolar

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Componente homopolar

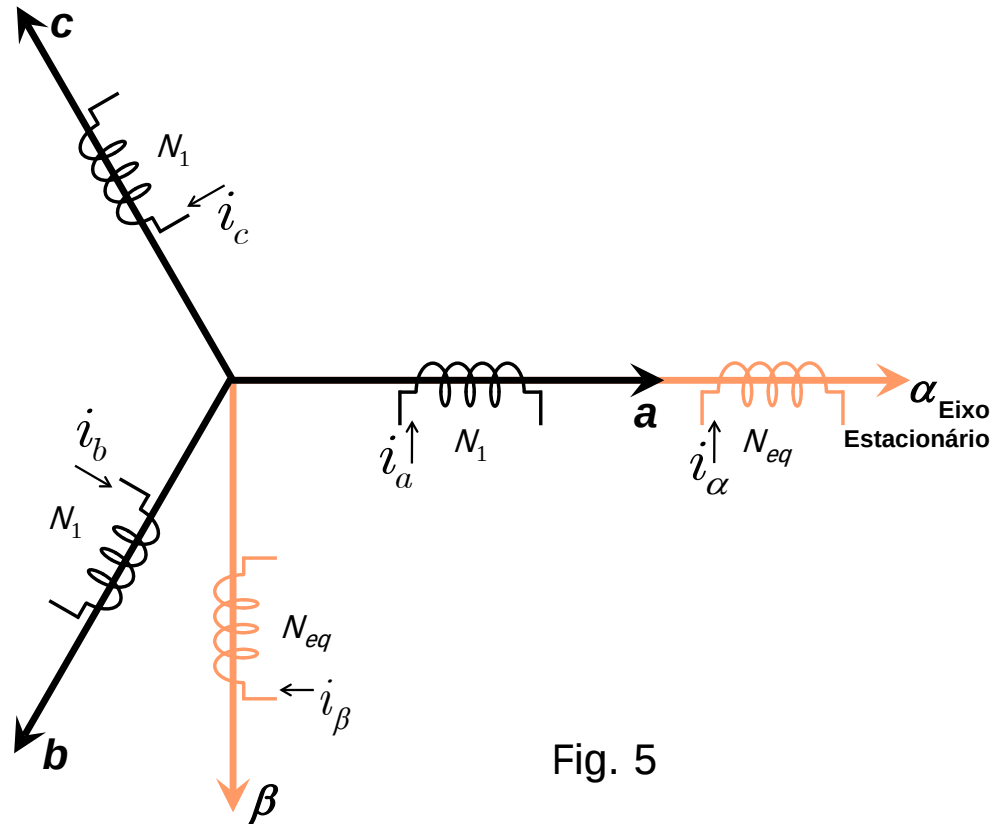
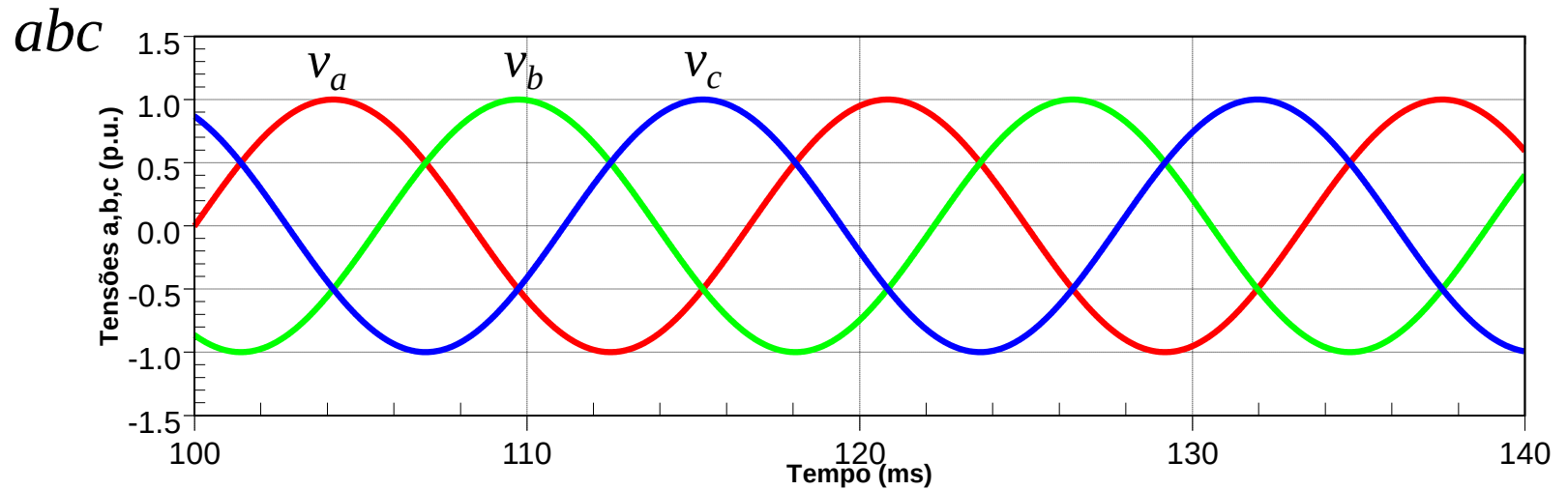
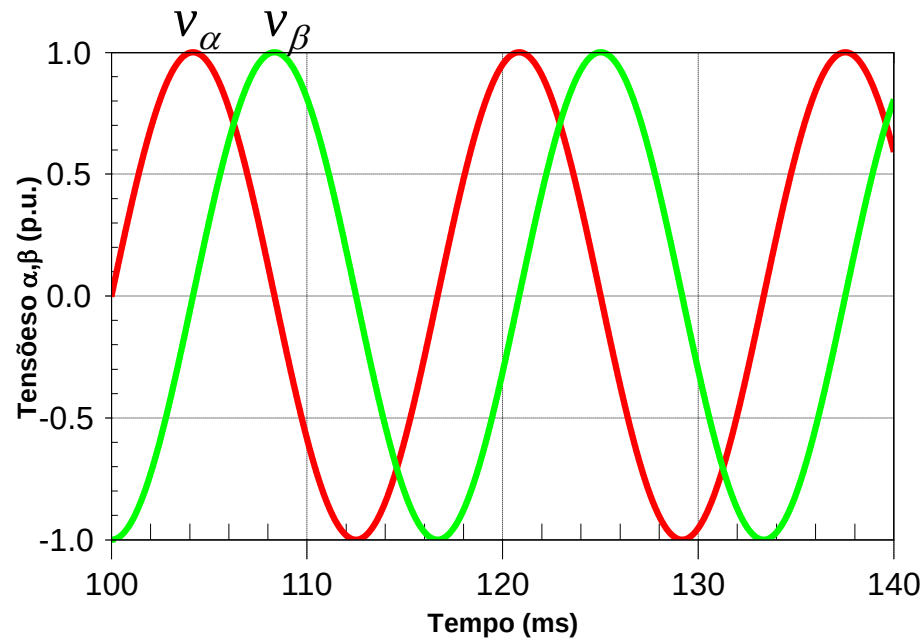


Fig. 5

Transformada de Clarke



Clarke



Vetor Girante

Seja o sistema trifásico definido a partir dos três fasores mostrado na figura, com expressões dadas a seguir:

$$v_a(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t)$$

$$v_b(t) = \sqrt{2}V \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_c(t) = \sqrt{2}V \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

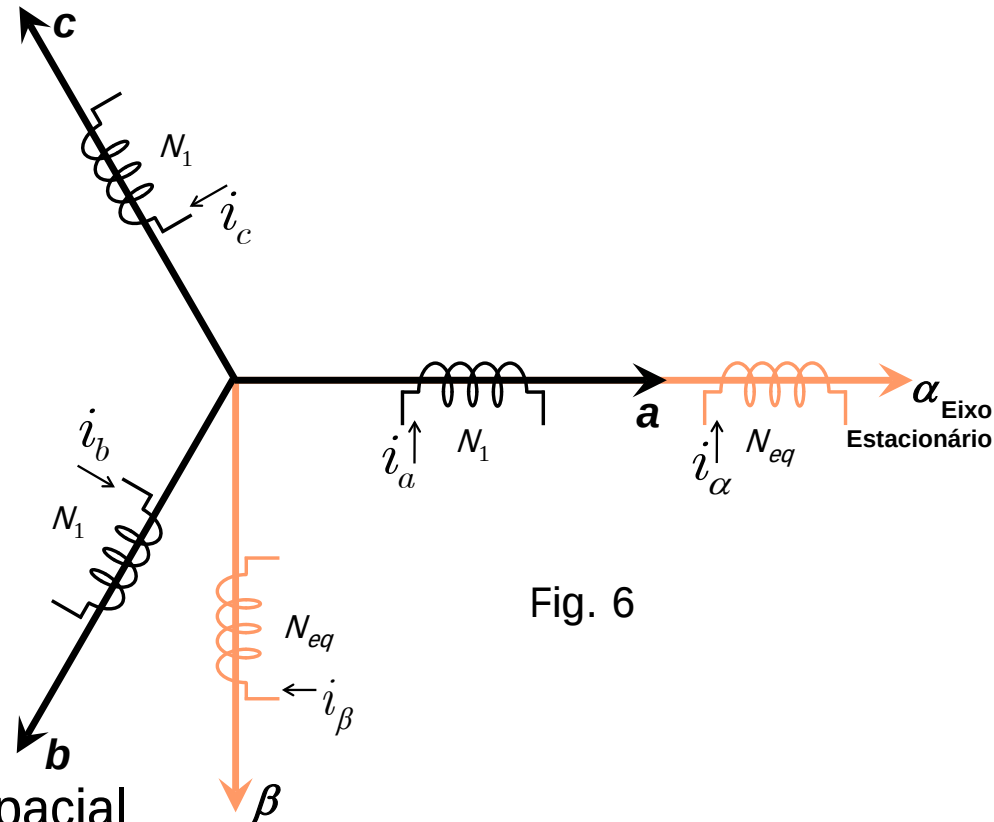


Fig. 6

Segundo KOVACS, o vetor espacial é definido por:

$$\vec{v}(t) = v_a(t)e^{j0} + v_b(t)e^{j\frac{2\pi}{3}} + v_c(t)e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

Vetor Girante

Desenvolvendo...

$$\vec{v}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}V \cos(\omega t) e^{j0} \\ + \\ \sqrt{2}V \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ + \\ \sqrt{2}V \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{array} \right.$$

$$\vec{v}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) e^{j0} \\ + \\ \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)}}{2} \right) e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ + \\ \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)}}{2} \right) e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{array} \right.$$

Vetor Girante

Desenvolvendo...

$$\vec{v}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) \\ + \\ \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j(\omega t)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)}}{2} \right) \\ + \\ \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j(\omega t)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)}}{2} \right) \end{array} \right\}$$

$$\vec{v}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) \\ + \\ \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} e^{j\frac{4\pi}{3}}}{2} \right) \\ + \\ \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} e^{j\frac{2\pi}{3}}}{2} \right) \end{array} \right\}$$

Vetor Girante

Desenvolvendo...

$$\vec{v}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) \\ + \\ \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \left[\cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} \right]}{2} \right) \\ + \\ \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \left[\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} \right]}{2} \right) \end{array} \right.$$

Vetor Girante

Desenvolvendo...

$$\vec{v}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) \\ + \\ \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \left[-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right]}{2} \right) \\ + \\ \sqrt{2}V \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \left[-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right]}{2} \right) \end{array} \right.$$

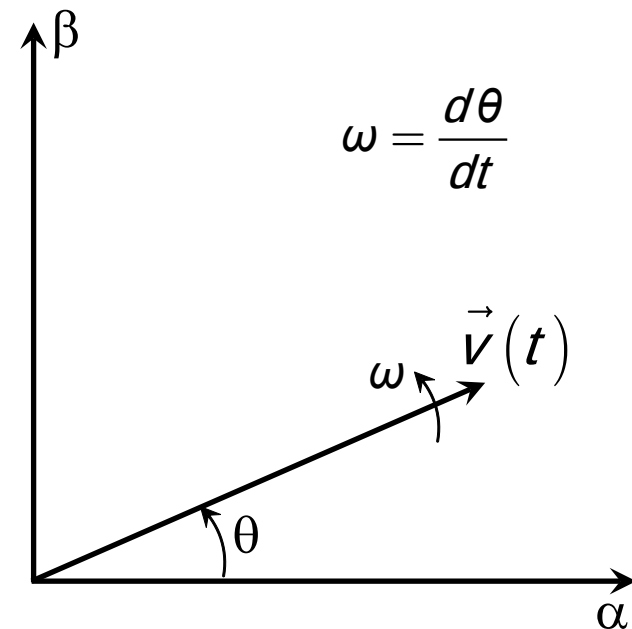


Fig. 7

Vetor Girante

➔

$$\vec{v}(t) = \frac{3}{2} \sqrt{2} V e^{j\omega t}$$

Vetor Girante

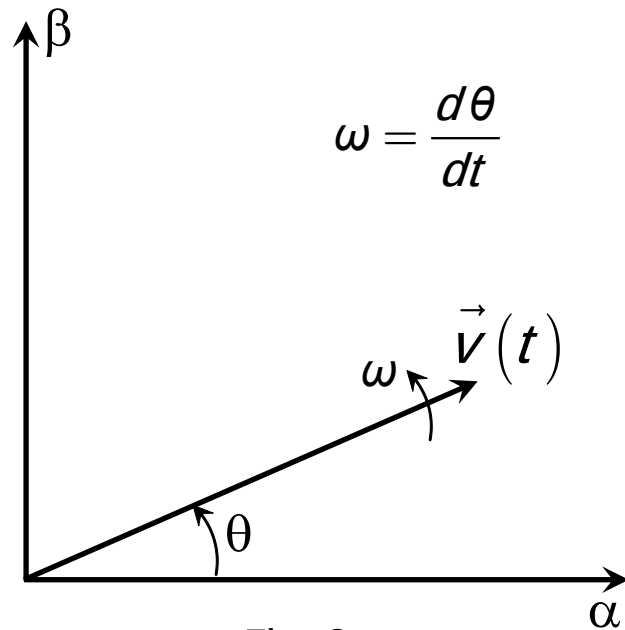


Fig. 8

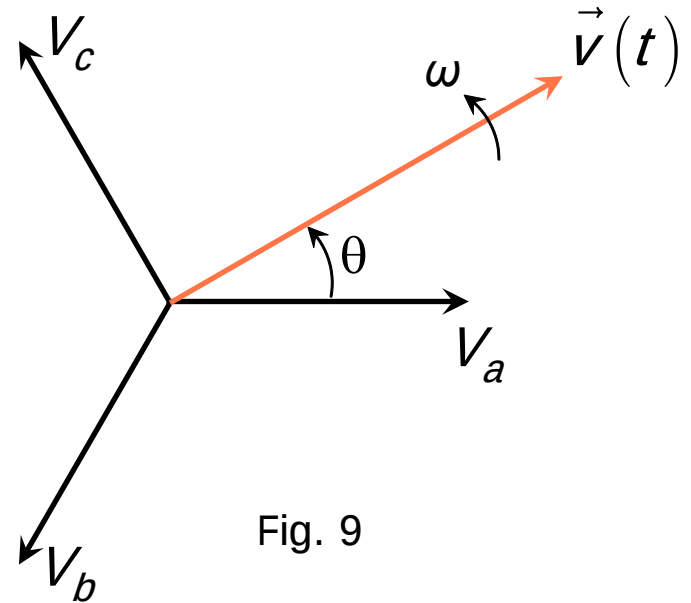


Fig. 9

Vetor Girante

$$\vec{v}(t) = \frac{3}{2} \sqrt{2} V e^{j\omega t}$$

Transformada de Park

Seja o sistema trifásico definido pelos três fasores da Fig. 8, com equações:

$$v_a(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t)$$

$$v_b(t) = \sqrt{2}V \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_c(t) = \sqrt{2}V \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

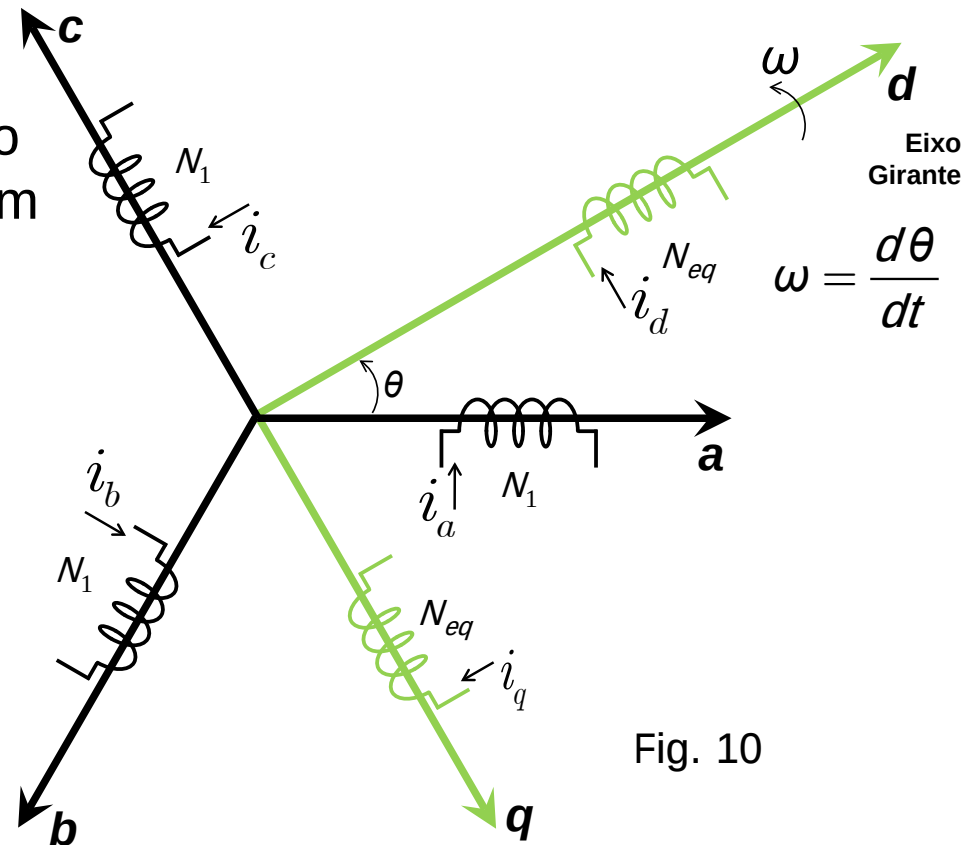


Fig. 10

$$\frac{N_{eq}}{2} i_d = \frac{N_1}{2} \left[i_a(t) \cos(\theta) + i_b(t) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c(t) \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$\frac{N_{eq}}{2} i_q = \frac{N_1}{2} \left[-i_a(t) \sin(\theta) - i_b(t) \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - i_c(t) \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

Transformada de Park

$$i_d = k \left[i_a(t) \cos(\theta) + i_b(t) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + i_c(t) \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$i_q = k \left[-i_a(t) \sin(\theta) - i_b(t) \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - i_c(t) \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$k = \frac{N_1}{N_{eq}}$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}}$$



Invariância em potência

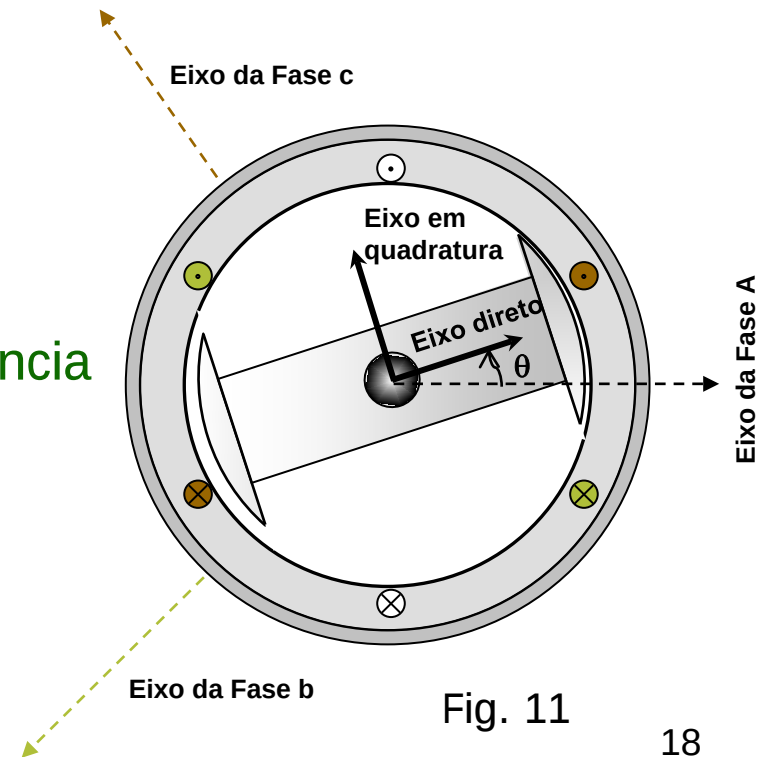


Fig. 11

Transformada de Park

Após algumas simplificações, o sistema bifásico em coordenadas dq, é dado por:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix}$$

Sistema a três fios
implica em ausência de
componente homopolar

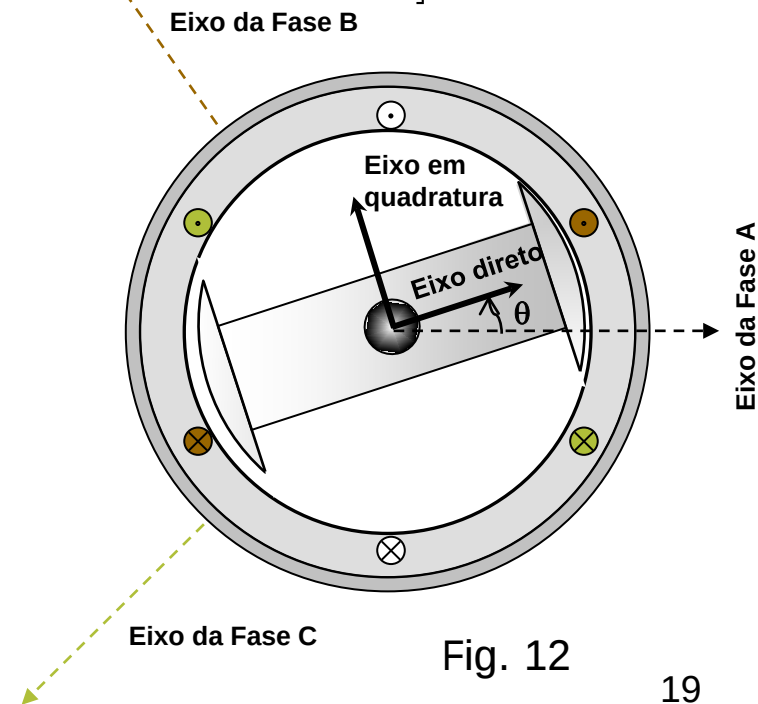


Fig. 12

Transformada de Park

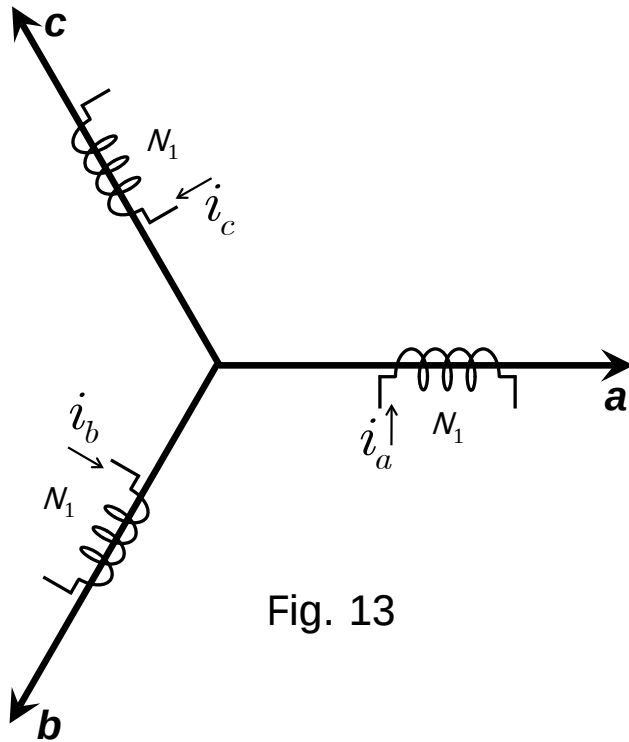


Fig. 13

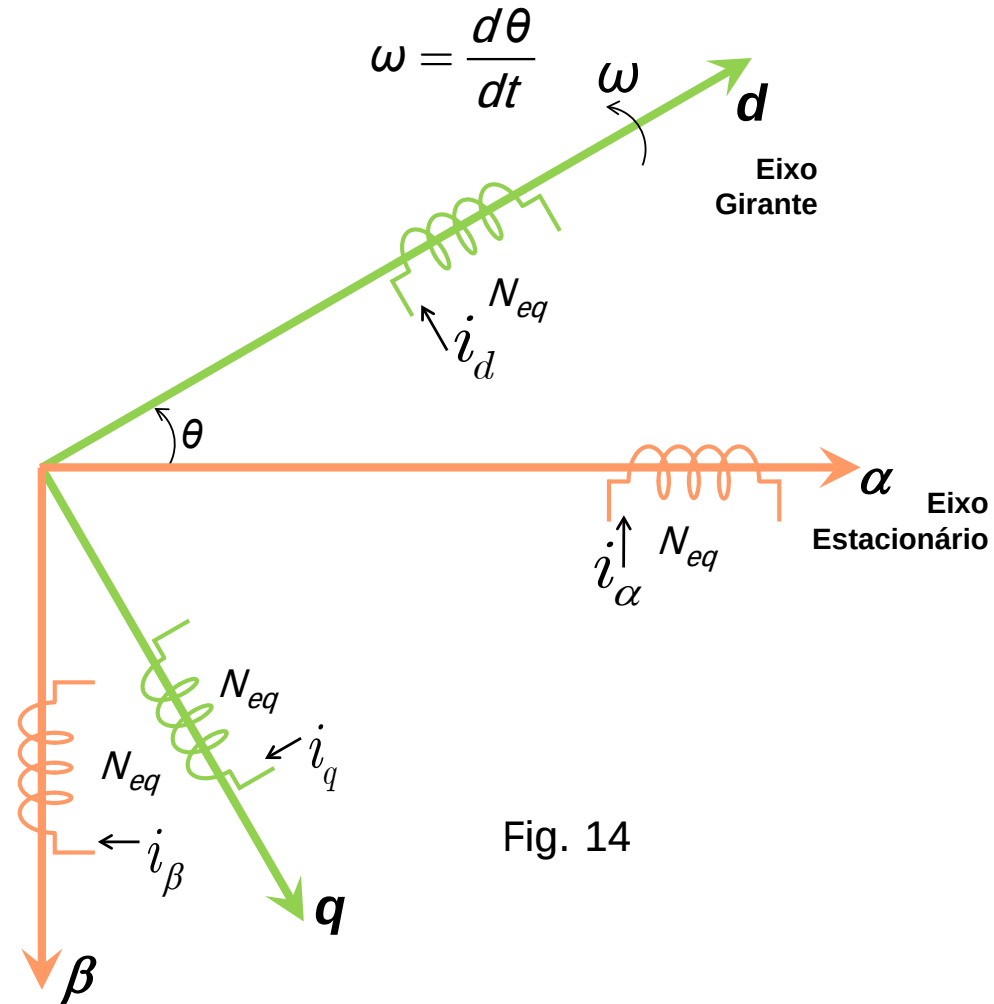
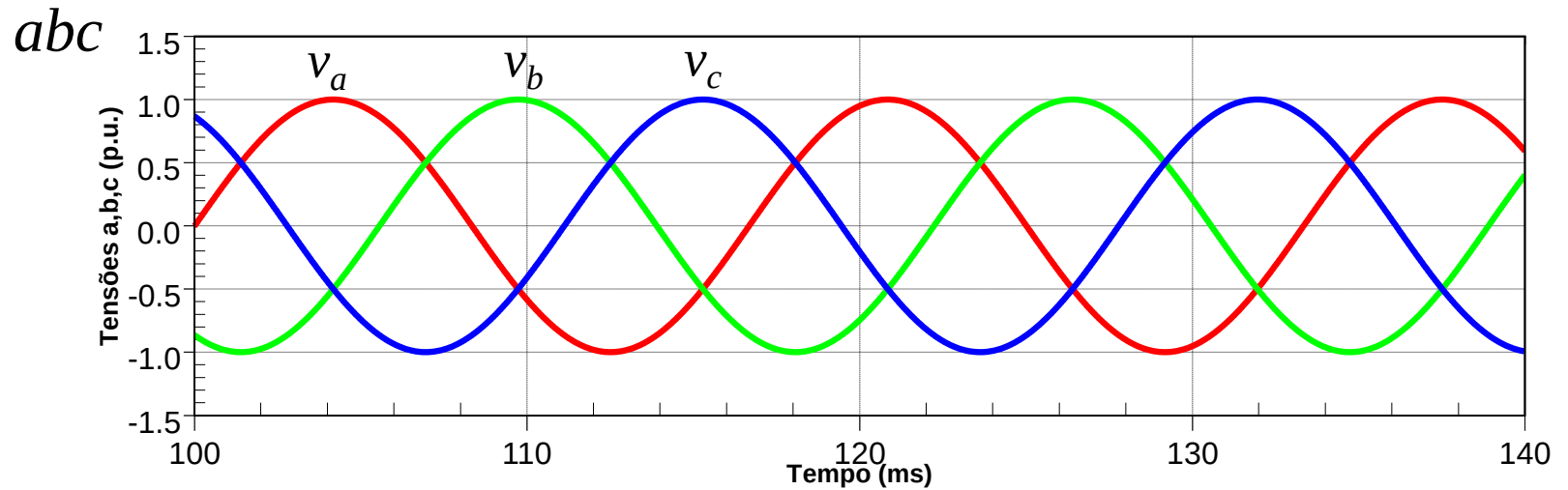
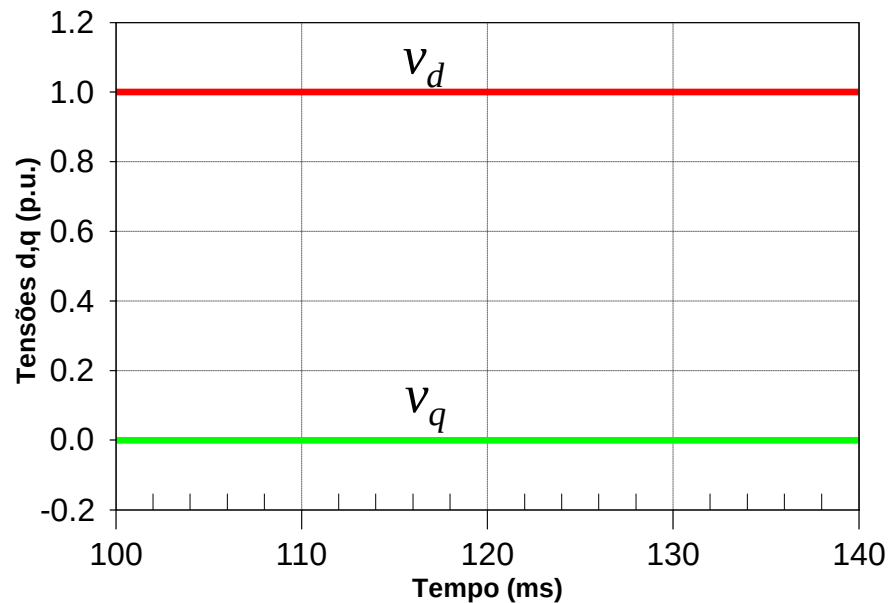


Fig. 14

Transformada de Clarke



Park



Bibliografia

1. I. Boldea; S. A. Nasar, 2005, ***Electric Drives***. 2nd. edition, CRC Press, New York, 544p.
2. W. Leonhard, 2001, ***Control of Electric Drives***, 3rd. edition, Springer, New York, 470p.
3. P. C. Krause, 2002, ***Analysis of Electric Machinery and Drive Systems***, 2nd. edition, Wiley-IEEE Press, New York, 600p.
4. P. K. Kovacs, 1984, ***Transiente Phenomena in Electrical Machines***, Elsevier, Amsterdam, 392p.

Perguntas?