CÁLCULO DE INDUTÂNCIAS E INDUTÂNCIAS MÚTUAS PELO MÉTODO DE MAXWELL

Antônio Carlos M. de Queiroz
COPPE/DEL/Universidade Federal do Rio de Janeiro
CP 68504 21945-970 Rio de Janeiro, RJ
acmq@ufrj.br

Palavras chave: Indutância, indutância mútua

O clássico livro de James Clerk Maxwell, , "A Treatise on Electricity and Magnetism" (1873) [1], descreve um interessante método para o cálculo de indutâncias, derivado de um método que calcula indutâncias mútuas. O método foi implementado no programa Inca, disponível em *http://www.coe.ufrj.br/~acmq/programs*. O artigo descreve detalhes da implementação. Várias outras fórmulas para o cálculo de indutâncias e indutâncias mútuas são também discutidas.

Keywords: Inductance, mutual inductance

The classical book by James Clerk Maxwell, "A Treatise on Electricity and Magnetism" (1873) [1], described an interesting method for the calculation of inductances, derived from a method that calculates mutual inductances. The method was implemented in the program Inca, available at http://www.coe.ufrj.br/~acmq /programs. The paper describes details of the implementation. Several other formulas for inductance and mutual inductance are also discussed.

1. INDUTÂNCIA MÚTUA

A indutância mútua entre dois filamentos de corrente pode ser calculada usando-se a fórmula de Neumann:

$$M=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint\frac{\vec{ds}\cdot\vec{ds}'}{r} \tag{1}$$

onde *ds* and *ds*'são seções incrementais dos filamentos, o ponto denota produto escalar, e *r* é a distância entre eles. A forma exata da integral é obtida de uma parametrização adequada da geometria dos filamentos.

701.][†] A indutância mútua entre dois filamentos circulares coaxiais, um com raio *a* e outro com raio *A*, com distância entre centros *b*, pode ser calculada como:

$$\begin{aligned}
&M_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds';\\
&r=\sqrt{A^2+a^2+b^2-2Aa\cos(\varphi-\varphi')};\\
&\varepsilon=\varphi-\varphi';\\
&ds=a\,d\varphi;\\
&ds'=A\,d\varphi';\\
&M_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Aa\cos(\varphi-\varphi')d\varphi d\varphi'}{\sqrt{A^2+a^2+b^2-2Aa\cos(\varphi-\varphi')}}
\end{aligned} \tag{2}$$

[†] Numeração no livro de Maxwell.

Esta integral pode ser resolvida exatamente como:

$$\begin{aligned}
&M_{12}=-\mu_0\sqrt{Aa}\left[\left(k-\frac{2}{k}\right)K+\frac{2}{k}E\right];\\
&k=\frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2+b^2}}
\end{aligned} \tag{3}$$

onde *K* e *E* são as integrais elípticas completas de primeiro e segundo tipos, com módulo *k*:

$$\begin{aligned}
&K=\mathrm{F}(k,\pi/2)=\mathrm{F}(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\\
&E=\mathrm{E}(k,\pi/2)=\mathrm{E}(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi
\end{aligned} \tag{4}$$

Para calcular a indutância mútua entre duas bobinas concêntricas com número inteiro de voltas, as bobinas 1 e 2 são primeiramente decompostas em conjuntos de n_1 e n_2 anéis circulares fechados, e a indutância mútua total é obtida da avaliação de:

$$M_{total}=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}M_{ij} \tag{5}$$

onde M_{ij} é a indutância mútua entre os anéis *i* e *j*. (É possível ter uma das bobinas com a última volta incompleta. (3) dá o resultado correto quando um dos anéis cobre apenas θ radianos se multiplicada por θ/(2π).)

2. AUTO-INDUTÂNCIA

693.][†] A indutância de uma bobina com seção uniforme, onde o raio de curvatura é grande comparado com as dimensões da seção transversa do condutor, pode ser calculada calculando-se a indutância mútua entre dois condutores filamentais colocados a uma distância igual à distância média geométrica entre todos os pares de pontos na seção do condutor. A distância média gométrica para um condutor circular de raio r é:

$$R = r\, e^{-\frac{1}{4}} = 0.7788\, r \tag{6}$$

O cálculo desta forma assume corrente uniforme no fio.

2.1 Indutância de um solenóide

No caso de um solenóide com número inteiro de voltas, o somatório duplo (5) pode ser grandemente simplificado, porquê existem apenas $2n$-1 têrmos diferentes a serem computados, em vez dos n^2 do caso geral. Considerando as voltas de número i em uma bobina e i' na outra, colocadas verticalmente a uma distância R, a indutância mútua entre a volta 1 e a volta 1', $M_{11'}$, aparece n vezes, $M_{21'}$ e $M_{12'}$ aparecem n-1 vezes, $M_{31'}$ e $M_{13'}$ aparecem n-2 vezes, e assim por diante, até $M_{n1'}$ e $M_{1n'}$ que aparecem apenas 1 vez. Se a bobina "imagem" fosse montada dentro ou fora, em vez de acima, apenas n têrmos diferentes seriam necessários, mas as bobinas seriam diferentes, e o êrro provavelmente maior. Veja a fórmula de Kirchhoff abaixo para uma idéia similar.

A rotina em Pascal usada no programa Inca (com as rotinas gráficas e mensagens removidas) é mostrada abaixo:

```
{
Inductance of a solenoid by Maxwell's
method, using elliptic integrals
Rounds the number of turns, n≥1
}
function MaxwellLE1(n,h,r,b,d:real):real;
var
  a1,c,b1b2,RM,z1,z2,z10,soma,turn1,
  turn2:real;
  v,vt:integer;
begin
  vt:=round(n);
  RM:=d/2*exp(-0.25); {g. m. d.}
  a1:=h/vt;
  b1b2:=RM;
  z10:=b+a1/2;
  z1:=z10;
  z2:=z10;
  for v:=1 to vt do begin
    c:=2*r/sqrt(sqr(2*r)+sqr(z1-z2-b1b2));
    EF(c);
    turn1:=-r*((c-2/c)*Fk+(2/c)*Ek);
    if v=1 then soma:=vt*turn1
    else begin
      c:=2*r/sqrt(sqr(2*r)+sqr(z1-z2+b1b2));
      EF(c);
      turn2:=-r*((c-2/c)*Fk+(2/c)*Ek);
      soma:=soma+(vt-(v-1))*(turn1+turn2);
    end;
    z1:=z1+a1;
  end;
  MaxwellLE1:=4e-7*pi*soma;
end;
```

2.2 Bobinas planas e cônicas

Uma bobina cônica ou plana não admite esta simplificação, mas ainda pode ser decomposta em uma série de anéis circulares. A indutância mútua entre duas bobinas coaxiais cônicas ainda pode ser calculada por (5), e a auto-indutância pode ser calculada como a indutância mútua entre duas bobinas idênticas separadas verticalmente por (6).

2.3 Avaliação das integrais elípticas

As integrais elípticas completas podem, em princípio, ser avaliadas pelas séries:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6+\cdots\right\} \\ E &= \frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5}-\cdots\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

Um problema é que se R é muito menor que o raio dos anéis, o módulo k em (3) tende a 1 nas integrais envolvendo uma volta e sua cópia adjacente, e a avaliação de K se torna problemática. A série converge muito lentamente, e fácilmente milhões de têrmos têm que ser usados. Integração numérica é uma alternativa quando isto acontece, mas ela tem que ser feita com alta resolução devido às altas derivadas do integrando próximo ao fim do intervalo (por volta de 100000 intervalos com uma regra de Simpson uniforme são necessários para boa precisão até k = 0.999999999). Felizmente, um algorítmo muito simples existe, o método AGM, que produz valores precisos rapidamente. Uma rotima em Pascal que avalia $F(c)$ e $E(c)$ usando o método AGM, implementado no programa, é:

```
{
Complete elliptic integrals of first
and second classes - AGM method.
Returns the global variables:
Ek=E(c) and Fk=F(c)
```

```
Doesn’t require more than 7 iterations for
c between 0 and 0.9999999999.
Reference: Pi and the AGM, J. Borwein and
P. Borwein, John Wiley & Sons.
}
procedure EF(c:real);
var
  a,b,a1,b1,E,i:real;
begin
  a:=1;
  b:=sqrt(1-sqr(c));
  E:=1-sqr(c)/2;
  i:=1;
  repeat
    a1:=(a+b)/2;
    b1:=sqrt(a*b);
    E:=E-i*sqr((a-b)/2);
    i:=2*i;
    a:=a1;
    b:=b1;
  until abs(a-b)<1e-15;
  Fk:=pi/(2*a);
  Ek:=E*Fk
end;
```

2.4 Bobinas espirais verdadeiras

A equação que dá a indutância mútua entre duas bobinas coaxiais cônicas gerais é uma versão mais geral de (1) (veja a fig. 1):

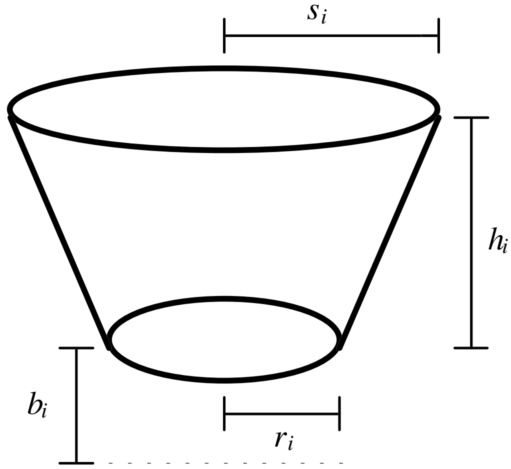

Fig. 1. Bobina cônica geral.

$$M_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi n_1}\int_0^{2\pi n_2}\frac{dx_1dx_2+dy_1dy_2+dz_1dz_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}} \quad (8)$$

onde, para i=1 e 2:

$$\begin{aligned}&g_i=\frac{s_i-r_i}{2\pi n_i};\;\; a_i=\frac{h_i}{2\pi n_i};\\ &x_i=(r_i+g_i\theta_i)\cos\theta_i;\;\; y_i=(r_i+g_i\theta_i)\sin\theta_i;\\ &z_i=a_i\theta_i+b_i;\\ &dx_i=[-y_i+g_i\cos\theta_i]d\theta_i;\;\; dy_i=[x_i+g_i\sin\theta_i]d\theta_i;\\ &dz_i=a_id\theta_i\end{aligned} \quad (9)$$

É assumido que ambas as espirais começam no mesmo ângulo. Esta aparentemente irredutível integral [7] pode ser resolvida numericamente. A auto-indutância de uma bobina cônica pode ser calculada considerando-se duas bobinas idênticas separadas por uma distância R’, que é R com uma pequena correção devida à inclinação do fio:

$$R'=R\frac{\sqrt{(h/n)^2+(2\pi r)^2}}{2\pi r} \quad (10)$$

Onde h é a altura da bobina, r é o raio da volta (sempre medido entre os centros dos fios), e n é o número de voltas. Para uma bobina cônica, a média geométrica dos raios é usada, e a correção é aproximada (a distância entre fios varia ao longo de duas bobinas cônicas idênticas empilhadas). A integração numérica deve ser feita com alta resolução, devido à pequena distância entre os filamentos.

2.5 Bobinas solenoidais verdadeiras

Para bobinas solenoidais, considerando dois solenóides com raios r_1 and r_2, números de espiras n_1 e n_2, alturas h_1 e h_2, e alturas da base b_1 and b_2 , (8) torna-se:

$$M=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi n_1}\int_0^{2\pi n_2}\frac{\left(r_1r_2\cos(\varphi-\varphi')+a_1a_2\right)d\varphi d\varphi'}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi-\varphi')+\left(a_1\varphi-a_2\varphi'+b_1-b_2\right)^2}} \quad (11)$$

onde $a_1=h_1/(2\pi n_1)$ e $a_2=h_2/(2\pi n_2)$.

Para o cálculo de auto-indutância, o programa usa duas bobinas idênticas separadas verticalmente por R’ (10). A mesma simplificação do caso com espiras circulares se aplica, com apenas $2n$ integrações sobre espiras simples sendo necessárias para a avaliação da integral.

3. FÓRMULAS EXPLÍCITAS PARA INDUTÂNCIA

O programa Inca também implementa várias fórmulas encontradas na literatura para o cálculo de indutâncias, geralmente de solenóides. Em todos os casos listados abaixo, as fórmulas foram adaptadas para indutâncias em Henrys e dimensões em metros, sempre entre centros de fios redondos.

A fórmula aproximada de Wheeler [2], para solenóides, funciona bem quando as espiras são próximas, dando resultado similar ao da fórmula de Lorenz (14). Uma versão da fórmula usando distâncias em metros é:

$$L = \mu_0 \frac{\pi r^2 n^2}{h + 0.9r} \tag{12}$$

A fórmula de Wheeler para bobinas planas [2] pode ser colocada na forma:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1000}{2.54} \frac{(r+s)^2 n^2}{60s - 28r} \tag{13}$$

A fórmula de Lorenz [3], modela um solenóide como uma folha cilíndrica de corrente, e funciona bem para solenóides com espiras finas e próximas. Esta equação aparece em vários outros textos (veja (16)) em formas equivalentes ligeiramente diferentes:

$$\begin{aligned} &L = \mu_0 \frac{8r^3}{3\varepsilon^2}\left[-1 + \frac{2k^2 - 1}{k^3}E + \frac{1-k^2}{k^3}K\right]; \\ &k^2 = \frac{4r^2}{h^2 + 4r^2}; \quad \varepsilon = \frac{h}{n} \end{aligned} \tag{14}$$

A fórmula de Kirchhoff [4], decompõe a bobina em espiras circulares, como feito no método de Maxwell, e combina indutâncias mútuas entre espiras calculadas por integrais elípticas com $f(0)$, uma aproximação para a auto-indutância de uma espira simples. α é o raio do fio. Para o caso de um solenóide (a fórmula abaixo) existe uma simplificação similar àquela descrita para o método de Maxwell, com apenas n indutâncias mútuas que são calculadas pela fórmula de Maxwell:

$$\begin{aligned} &L = nf(0) + 2(n-1)f(\varepsilon) + 2(n-2)f(2\varepsilon) + \cdots + 2f((n-1)\varepsilon); \\ &f(z) = \mu_0 \frac{r}{k}\left[\left(2 - k^2\right)K - 2E\right]; \\ &k^2 = \frac{4r^2}{4r^2 + z^2}; \\ &f(0) = \mu_0 r\left(\mathrm{Ln}\frac{8r}{\alpha} - \frac{7}{4}\right); \quad \varepsilon = \frac{h}{n} \end{aligned} \tag{15}$$

Esta fórmula pode ser facilmente adaptada para bobinas com qualquer forma que possa ser decomposta em anéis circulares coaxiais.

A fórmula de Snow [5][6] adiciona uma complicada correção à fórmula de Lorenz. O resultado é similar aos de Maxwell ou Kirchhoff usando espiras circulares, mas o cálculo é mais rápido, sem um somatório. a é o raio da bobina, b é a altura da bobina, e c é o diâmetro do fio. O número de espiras n deve ser inteiro:

$$\begin{aligned} &p = \frac{2a}{b}; \quad \theta = \tan^{-1} p; \quad k = \sin\theta; \quad k' = \cos\theta; \quad z = \frac{\pi n c}{b}; \\ &L = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{8n^2 a\pi}{3}\left[\frac{K + (p^2 - 1)E}{k} - p^2\right] + \right. \\ &+ 2\pi a\left[\begin{array}{l} 2n\left(\frac{1}{4} - \ln z\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2\pi n a}{b}\right) - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{E}{k} - 1\right)\left(1 + \frac{z^2}{8}\right) - \\ - \frac{2}{3}\left(\frac{K-E}{k} - \frac{kK}{2}\right) - \frac{k'}{2k}\left(1 - \frac{k'\theta}{k}\right) \end{array}\right] + \\ &\left. + b\left(\ln\frac{1+k'}{1-k'} + k'\ln 4\right)\right\} \end{aligned} \tag{16}$$

4. FÓRMULAS EXPLÍCITAS PARA INDUTÂNCIA MÚTUA

Uma interessante solução envolvendo espirais verdadeiras foi a fórmula para a indutância mútua entre um anel circular e um solenóide verdadeiro começando no seu plano obtida por John Viriamu Jones [7]. A é o raio do solenóide, a o raio do anel circular, p a altura de uma espira dividida por 2π, Θ é o ângulo final do solenóide $2\pi n$, e $\prod(k,c)$ é a integral elíptica completa do terceiro tipo. Para solenóides a qualquer distância do anel, $M = M_{\Theta 2} - M_{\Theta 1}$. O artigo original também mostra como calcular a indutância mútua entre uma folha de corrente circular e um solenóide, sem chegar à complicada fórmula final (21).

$$\begin{aligned} &M_\Theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\Theta(A+a)ck\left[\frac{K-E}{k^2} + \frac{c'^2}{c^2}\left(K - \Pi(k,c)\right)\right]; \\ &c = \frac{2\sqrt{Aa}}{A+a}; \quad x = p\Theta; \quad c'^2 = 1 - c^2; \\ &k = \frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2 + x^2}} \end{aligned} \tag{17}$$

Se c=1, o segundo termo se reduz a zero. A integral elíptica do terceiro tipo:

$$\Pi(k,c) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(1 - c^2\sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \tag{18}$$

pode também ser avaliada eficientemente por um algoritmo AGM [8]. Abaixo está a rotina em Pascal usada no programa Inca, que avalia simultaneamente as três integrais elípticas quando elas são necessárias. Ela requer no máximo 7 iterações no ciclo:

```
{
Complete elliptic integrals of first, second, and
third kinds - AGM
Returns the global variables Ek=E(k), Fk=F(k), and
IIkc=II(k,c)
Reference: Garrett, Journal of Applied Physics, 34,
```

```
9, 1963, p. 2571
}
procedure EFII(k,c:real);
var
  a,b,d,e,f,a1,b1,d1,e1,f1,S,i:real;
begin
  a:=1;
  b:=sqrt(1-sqr(k));
  d:=(1-sqr(c))/b;
  e:=sqr(c)/(1-sqr(c));
  f:=0;
  i:=1/2;
  S:=i*sqr(a-b);
  repeat
    a1:=(a+b)/2;
    b1:=sqrt(a*b);
    i:=2*i;
    S:=S+i*sqr(a1-b1);
    d1:=b1/(4*a1)*(2+d+1/d);
    e1:=(d*e+f)/(1+d);
    f1:=(e+f)/2;
    a:=a1;
    b:=b1;
    d:=d1;
    e:=e1;
    f:=f1;
  until (abs(a-b)<1e-15) and (abs(d-1)<1e-15);
  Fk:=pi/(2*a);
  Ek:=Fk-Fk*(sqr(k)+S)/2;
  IIkc:=Fk*f+Fk;
end;
```

Com esta fórmula, a indutância mútua entre uma bobina com espiras circulares e um solenóide verdadeiro pode ser facilmente calculada, somando-se todas as indutâncias mútuas entre as espiras individuais e o solenóide.

A mesma fórmula pode também ser escrita como (adaptando uma fórmula em [8]):

$$M_\Theta = \frac{\mu_0}{2} n \left\{ z(K-E) + \frac{(A-a)^2}{z}\left[K - \Pi(k,c)\right] \right\};$$
$$z = \sqrt{(A+a)^2 + x^2}; \tag{19}$$
$$k = \frac{2\sqrt{Aa}}{z}; \quad c = \frac{2\sqrt{Aa}}{A+a}$$

Novamente, o segundo termo desaparece se A=a. Outra fórmula equivalente, que em vez da integral elíptica completa de terceiro tipo usa integrais elípticas incompletas (os limites das integrais em (4) são de 0 a θ) é encontrada em [5]:

$$M_\Theta = \frac{\mu_0}{2}\frac{n}{x}\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2x\sqrt{Aa}}{k}(K-E) \pm \\ \pm\left|A^2 - a^2\right|\left[KE(k',\theta) - (K-E)F(k',\theta) - \dfrac{\pi}{2}\right] \end{array} \right\}; \tag{20}$$
$$k = \sqrt{\frac{4Aa}{x^2 + (A+a)^2}}; \quad k' = \sqrt{1-k^2}; \quad \theta = sin^{-1}\sqrt{\frac{1+\left(\dfrac{x}{A+a}\right)^2}{1+\left(\dfrac{x}{A-a}\right)^2}}$$

Curiosamente, a fórmula para a indutância mútua entre um anel circular e uma folha cilíndrica de corrente é exatamente a mesma para a indutância mútua entre um anel circular e um solenóide verdadeiro [7].

A fórmula para a indutância mútua entre dois solenóides modelados como folhas de corrente, sugerida em [7], é obtida como (adaptando [5]):

$$M = \frac{2\pi n_1 n_2}{h_1 h_2}\left\{ \begin{array}{l} W(b_2 - b_1 + h_2) + W(b_2 - b_1 + h_1) - \\ W(b_2 - b_1 + h_2 - h_1) - W(b_2 - b_1) \end{array} \right\};$$
$$W(x) = xW'(x) + \frac{8(r_1 r_2)^{3/2}}{3k}\left[K - \left(\frac{2}{k^2} - 1\right)(K-E)\right];$$
$$W'(x) = \frac{2x\sqrt{r_1 r_2}}{k}(K-E) \pm$$
$$\pm\left|r_1^2 - r_2^2\right|\left[KE(k',\theta) - (K-E)F(k',\theta) - \frac{\pi}{2}\right];$$
$$k = \sqrt{\frac{4r_1 r_2}{x^2 + (r_1 + r_2)^2}}; \quad k' = \sqrt{1-k^2};$$
$$\theta = sin^{-1}\sqrt{\frac{1+\left(\dfrac{x}{r_1+r_2}\right)^2}{1+\left(\dfrac{x}{r_1-r_2}\right)^2}} \tag{21}$$

O sinal do termo ± é positivo se x é positivo. Quando $r_1=r_2$ e $x=0$ (bobinas se tocando), $k=1$, e a fórmula para $W(x)$ tende a um limite. Comparando (20) com (19), pode-se ver que (21) pode também ser escrita usando a integral elíptica completa de terceiro tipo, que é mais fácil de avaliar. Apenas a fórmula para for $W'(x)$ muda:

$$W'(x) = x\left\{ z(K-E) + \frac{(r_1 - r_2)^2}{z}\left[K - \Pi(k,c)\right] \right\};$$
$$z = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + x^2}; \tag{22}$$
$$k = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{z}; \quad c = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}$$

Ainda outra expressão para $W'(x)$ é obtida reconhecendo-se que a função Lambda de Heuman $\Lambda_0(k,\theta)$ aparece em (21) (um caso restrito é listado em [9]):

$$W'(x) = \frac{2x\sqrt{r_1 r_2}}{k}(K-E) \pm \left|r_1^2 - r_2^2\right|\frac{\pi}{2}\left[\Lambda_0(k,\theta) - 1\right];$$
$$k = \sqrt{\frac{4r_1 r_2}{x^2 + (r_1 + r_2)^2}}; \quad \theta = sin^{-1}\sqrt{\frac{1+\left(\dfrac{x}{r_1+r_2}\right)^2}{1+\left(\dfrac{x}{r_1-r_2}\right)^2}} \tag{23}$$

A mesma equivalência pode ser usada em (20). Isto apenas simplifica a notação. A derivação de (21) e outras variações dela podem ser encontradas em [14].

Outras fórmulas para indutância mútua entre bobinas cilíndricas e planas, que algumas vezes são equivalentes às fórmulas descritas acima, podem ser encontradas na ref. [9] (formulas envolvendo folhas de corrente em disco e cilíndricas, em alguns arranjos particulares), [10] (indutâncias mútuas entre discos e solenóides modelados como folhas de corrente e um método usando filamentos circulares), [11] (complicada fórmula para a indutância mútua entre duas bobinas com seção retangular) [12] (método de filamentos para bobinas de seção retangular), e na referência clássica [13] (com muitas tabelas e referências).

4.1 Coeficiente de acoplamento independente dos números de espiras

Quando as bobinas são consideradas como folhas de corrente, o coeficiente de acoplamento $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$ se torna independente dos números de espiras nas bobinas. Para bobinas solenoidais, por exemplo, isto acontece se as indutâncias são calculadas pelo método de Lorenz (14) e a indutância mútua é calculada pela fórmula de Snow/Jones (21).

5. BOBINAS PRIMÁRIAS COM TODAS AS ESPIRAS EM PARALELO

Transformadores com bobinas primárias de baixa indutância podem ser construídas conectando-se as espiras da bobina em paralelo em vez de em série.
Indutâncias e indutâncias mútuas de um transformador construído desta forma podem ser calculadas pelo procedimento:
1) Calcula-se a matriz de indutâncias do sistema completo, considerando cada espira individual da bobina primária como um indutor separado. O programa Inca usa (3) para indutâncias e indutâncias mútuas entre as espiras da bobina primária e para a indutância da bobina secundária. Indutâncias mútuas entre as espiras primárias e a bobina secundária são calculadas por (17). Para *n* espiras primárias, isto resulta em uma matriz de dimensão $(n+1)\times(n+1)$.
2) Inverte-se a matriz, e soma-se todas as primeiras *n* linhas e colunas. Isto corresponde a ter a mesma voltagem sobre todas as espiras primárias, e uma corrente primária que é a soma das correntes em todas as espiras.
3) Inverte-se novamente a matriz 2×2 resultante, obtendo-se as indutâncias primária e secundária resultantes, e a indutância mútua.
Um curioso efeito desta conexão é que a indutância secundária é ligeiramente reduzida, devido às diferentes indutâncias mútuas entre as espiras primárias e a bobina secundária. A indutância mútua resultante é similar à indutância mútua entre duas bobinas espirais, e a indutância primária é similar à de uma bobina de uma espira modelada como uma folha de corrente.

6. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Algumas bobinas solenoidais foram construídas com tubo de cobre e tiveram suas indutâncias medidas. A tabela abaixo compara as indutâncias medidas com as predições pelo método de Maxwell, com as espiras aproximadas por anéis circulares, e também lista os valores que podem ser obtidos com as fórmulas de Wheeler, Lorenz, Snow e Kirchhoff. Indutâncias em μH, dimensões em metros.

Bobinas curtas com espiras próximas: Raio da bobina = 0.486 m, diâmetro do tubo = 0.0095 m.

Altura	N	Med	Whe	Lor	Sno	Kir	Max
0.0921	5	49	44.03	49.58	49.20	49.23	49.36
0.0719	4	33	29.29	34.13	33.82	33.85	33.94
0.0516	3	20	17.16	21.02	20.75	20.78	20.84
0.0312	2	9	7.96	10.57	10.33	10.35	10.39
0.0109	1	2	2.08	3.28	3.00	3.03	3.03

Bobinas longas com espiras espaçadas: Raio da bobina = 0.486, diâmetro do tubo = 0.0095 m.

Altura	N	Med	Whe	Lor	Sno	Kir	Max
2.1336	5	17	9.07	9.09	18.75	19.17	18.17
1.7051	4	13	6.96	6.98	14.67	14.28	14.28
1.2764	3	10	4.90	4.90	10.64	10.42	10.42
0.8479	2	6	2.90	2.90	6.71	6.64	6.64
0.4191	1	3	1.09	1.09	3.00	3.03	3.03

As medições mostram que as fórmulas baseadas em folhas de corrente (fórmula de Lorenz e sua aproximação por Wheeler), falham quando as espiras são espaçadas. As outras fórmulas, baseadas em filamentos, entretanto, funcionam bem em todos os casos.

AGRADECIMENTOS

Para Godfrey Loudner pela indicação sobre o algoritmo AGM e vários artigos, e para Barton B. Anderson pelas medidas experimentais.

REFERÊNCIAS

[1] James Clerk Maxwell, “ A Treatise on Electricity and Magnetism, Dover Publications Inc, New York, 1954 (reimpressão do original de 1873).
[2] H. A. Wheeler, “Simple inductance formulas for radio coils,” Proceedings of the IRE, vol 16, no. 10, October 1928.
[3] L. Lorenz, “Ueber die Fortpflanzung der Electricität,” Annalen der Physik, VII, 1879, pp. 161-193.
[4] G. Kirchhoff, “Zur Theorie der Entladung einer Leydner Flasche,” Annalen der Physik, CXXI, 1864, pp. 551-566.
[5] Chester Snow, “Formulas for Computing Capacitance and Inductance,” National Bureau of Standards Circular #544.
[6] Steve Moshier, programa “Coil”, disponível em http:// www.moshier.net/coildoc.html
[7] John Viriamu Jones, “On the calculation of the coefficient of mutual induction of a circle and a coaxial helix, and of the electromagnetic force between a helical current and a uniform coaxial circular cylindrical current sheet,” Phylosophical Transactions of the Royal Society, 63, 192, 1898, pp. 192-205.
[8] M. W. Garrett, “Calculation of fields, forces, and mutual inductances of current systems by elliptic integrals,” Journal of Applied Physics, 34, 9, September 1963, pp. 2567-2573.
[9] S. Babic and C. Akyel, “Improvement in calculation of the self and mutual inductance of thin-wall solenoids and disk coils,” IEEE Transactions on Magnetics, 36, 4, July 2000, pp. 1970-1975.
[10] C. Akyel, S. Babic, and S. Kincic, “New and fast procedures for calculating the mutual inductance of coaxial circular coils (circular coil-disk coil)”, IEEE Transactions on Magnetics, 38, 5, September 2002, pp. 2367-2369.
[11] D. Yu and K. S. Han, "Self-inductance of air-core circular coils with rectangular cross section," IEEE Transactions on Magnetics, MAG-33, 6, November 1987, pp. 3916-3921.
[12] Ki-Bong Kim et al, "Mutual inductance of noncoaxial circular coils with constant current density", IEEE Transactions on Magnetics, 33, 5, September 1997, pp. 4303-4309.
[13] Frederick Grover, “Inductance Calculations: Working Formulas and Tables,” Dover Publications, Inc., New York 1946.
[14] Chester Snow, “Mutual inductance and force between two coaxial helical wires,”, Journal of Research of the National Bureau of Standards, 22, February 1939, pp. 239-269.